

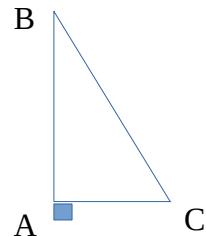
Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

ABC est un triangle rectangle en A, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Le plus grand côté



On peut calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres côtés. Pour cela, on prend la racine carrée d'un nombre.

Racine carrée :

Définition

Exemples

$\sqrt{9} = 3$ car $3 > 0$ et $3^2 = 9$; $\sqrt{36} = 6$ car $6 > 0$ et $6^2 = 36$

On considère un nombre positif x .

Alors \sqrt{x} est le nombre positif dont le carré vaut x . $\sqrt{50} \approx 7,07$ On trouve une valeur approchée de $\sqrt{50}$ avec la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice.

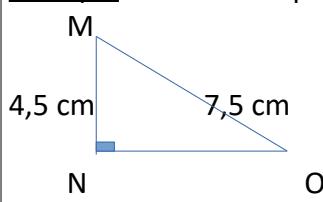
Remarque : on a aussi $(-3)x(-3) = 9$

Calculer une longueur en utilisant le théorème de Pythagore :

Le triangle est rectangle et je connais les longueurs de deux côtés :

1er cas : on connaît la longueur de l'hypoténuse et d'un autre côté.

Exemple: voici un croquis. Calculer NO.



Dans le triangle MNO **rectangle en N**, [MO] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore:

$$MO^2 = NO^2 + NM^2$$

en remplaçant par les valeurs on a :

$$7,5^2 = NO^2 + 4,5^2$$

$$\text{donc } NO^2 = 7,5^2 - 4,5^2$$

$$NO^2 = 56,25 - 20,25$$

$$NO^2 = 36$$

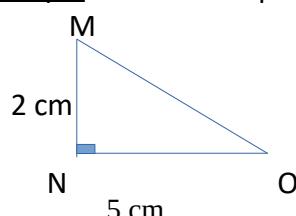
or NO est une longueur

$$\text{donc } NO = \sqrt{36} \text{ cm}$$

$$NO = 6 \text{ cm}$$

2ème cas : on connaît la longueur des deux côtés de l'angle droit.

Exemple: voici un croquis. Calculer MO



Dans le triangle MNO **rectangle en N**, [MO] est l'hypoténuse, d'après le théorème de Pythagore:

$$MO^2 = NO^2 + NM^2$$

en remplaçant par les valeurs on a :

$$MO^2 = 5^2 + 2^2$$

$$\text{donc } MO^2 = 25 + 4$$

$$MO^2 = 29$$

or MO est une longueur

$$\text{donc } MO = \sqrt{29} \text{ cm}$$

$$MO \approx 5,4 \text{ cm}$$

La réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore :

Dans un triangle,

si la somme des carrés des longueurs de 2 côtés est égale au carré du troisième côté alors le triangle est un triangle rectangle d'hypoténuse ce troisième côté.

Ou

ABC est un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est rectangle en A.

Si l'égalité n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle.

on peut tester un triangle pour savoir s'il est rectangle ou pas quand on connaît les trois côtés.

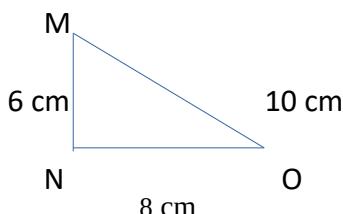
Montrer qu'un triangle est rectangle ou pas :

Je connais les longueurs des trois côtés :

1er cas : il y aura égalité.

Exemple: voici un croquis.

MNO est-il un triangle rectangle ?



Dans le triangle MNO , [MO] est le plus grand côté.

$$MO^2 = 10^2 = 100 \quad \text{et} \quad NO^2 + NM^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

donc on a :

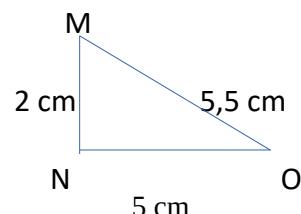
$$MO^2 = NO^2 + NM^2$$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle MNO est rectangle en N .

2ème cas : il n'y aura pas égalité.

Exemple: voici un croquis.

MNO est-il un triangle rectangle ?



Dans le triangle MNO , [MO] est le plus grand côté.

$$MO^2 = 5,5^2 = 30,25 \quad \text{et} \quad NO^2 + NM^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

donc on a :

$$MO^2 \neq NO^2 + NM^2$$

donc le théorème de Pythagore n'est pas vérifié,
le triangle MNO n'est pas un triangle rectangle .

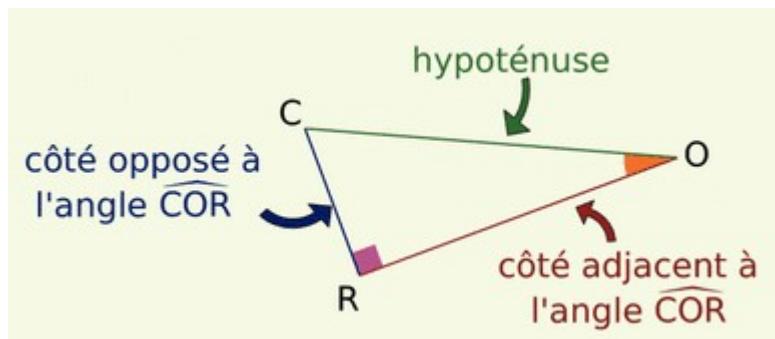
Remarque :

1) on ne doit pas écrire [MO] est l'hypoténuse car on ne sait pas si le triangle est rectangle avant d'avoir vérifié l'égalité.

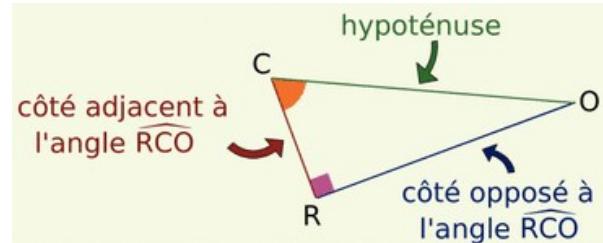
2) on ne peut pas écrire l'égalité dès le début de la rédaction car on ne sait pas si le triangle est rectangle.
On calcule le membre de droite et le membre de gauche séparément puis on peut écrire ou non l'égalité.

Trigonométrie, cosinus d'un angle aigu

Vocabulaire.



On a aussi :



Cosinus d'un angle aigu.

Définition : Dans un triangle rectangle :

Le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

☞ Autrement dit :

cosinus angle =
$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

Applications.

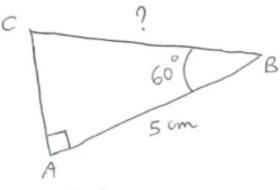
La formule du cosinus permet de

-**calculer une longueur** (celle de l'hypoténuse ou celle du côté adjacent)

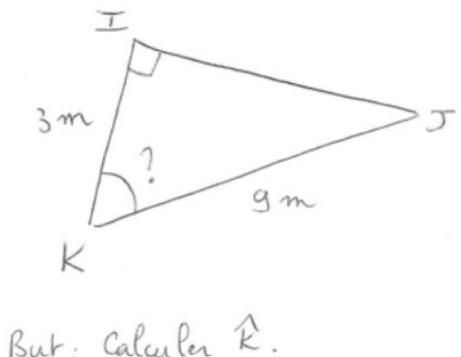
ou bien

-**calculer la mesure d'un angle**, dans un triangle rectangle uniquement.

Exemple 1 : calcul de longueur.

Calcul de la longueur de l'hypoténuse	Calcul de la longueur du côté adjacent
 <p>But: Calculer BC.</p> <p>Le triangle ABC est rectangle en A.</p> <p>On peut donc utiliser la formule du cosinus :</p> $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ $\cos(60^\circ) = \frac{AB}{BC}$ $\cos(60^\circ) = \frac{5}{BC} \quad (\text{on remplace par les valeurs})$ $\text{donc } BC = 5 \div \cos(60^\circ) \quad (\text{car } \frac{\cos(60)}{1} = \frac{5}{BC})$ <p><u>BC = 10 cm</u></p>	<p>On considère un triangle LEA rectangle en E tel que LA = 5 cm et $\widehat{ELA} = 50^\circ$.</p> <p>faire le croquis</p> <p>Le triangle LEA est rectangle en E.</p> <p>On peut donc utiliser la formule du cosinus :</p> $\cos(\widehat{ELA}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ $\cos(50^\circ) = \frac{EL}{LA}$ $\cos(50^\circ) = \frac{EL}{5} \quad (\text{on remplace par les valeurs})$ $\text{donc } EL = 5 \times \cos(50^\circ) \quad (\text{car } \frac{\cos(50)}{1} = \frac{EL}{5})$ <p><u>BC ≈ 3,2 cm</u></p>

Exemple 2 : calcul de la mesure d'un angle.

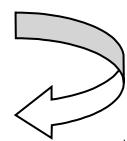


Le triangle IJK est rectangle en I.

On peut donc utiliser la formule du cosinus :

$$\cos(\widehat{IJK}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{IJK}) = \frac{3}{9}$$



$$\widehat{IJK} \approx 70,5^\circ$$

seconde cos (3 : 9)
en utilisant la calculatrice.