MULTIPLICATION ET DIVISION DE NOMBRES RELATIFS

MULTIPLICATION DE DEUX NOMBRES RELATIFS

Pour multiplier deux nombres relatifs :

- on multiplie les distances à zéro
- et on applique la règle des signes.

Règle des signes

Le produit de deux nombres relatifs de **même signe** est un nombre **positif**.

Le produit de deux nombres relatifs de **signe contraire** est un nombre **négatif**.

Exemples:

$3\times4=12$ $(-3)\times(-4)=12$ $(+3)\times(-4)=(-12)$ $(-3)\times(+4)=(-12)$

Écriture simplifiée

$(-3)\times(-4)$ s'écrit aussi $-3\times(-4)$.

$(-3)\times(+4)$ s'écrit aussi $-3\times(+4)$ ou encore -3×4.

MULTIPLICATION DE PLUSIEURS NOMBRES RELATIFS

Propriété:

Lorsque l'on multiplie des nombres relatifs différents de zéro :

-s'il y a un nombre **pair** de facteurs négatifs, alors le produit est **positif**.

- s'il y a un nombre **impair** de facteurs négatifs, alors le produit est **négatif**.

Exemples:

$(-2)\times3\times(-5)$ est un produit positif car il y a deux facteurs négatifs.

$(-2)\times(-5)\times(-4)$ est un produit négatif car il y a trois facteurs négatifs.

DIVISION DE DEUX NOMBRES RELATIFS

Pour diviser deux nombres relatifs :

- on divise les distances à zéro
- et on applique la règle des signes.

Règle des signes

Le quotient de deux nombres relatifs de **même signe** est un nombre **positif**.

Le quotient de deux nombres relatifs de **signe contraire** est un nombre **négatif**.

Exemples:

$(-10):(-2)=5$ $10:2=5$ $(-10):(+2)=(-5)$ $(+10):(-2)=(-5)$

Addition et soustraction de fractions

Ordre :

1) Égalité

Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal.

Pour tous nombres *a* et *b* et *k* , *b* et *k* non nuls : $\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$ et $\frac{a}{b}=\frac{a\div k}{b\div k}$

2) Comparaison

a) Comparaison par rapport à 1 :

Une fraction dont le numérateur est supérieur au dénominateur est supérieure à 1.
Une fraction dont le numérateur est inférieur au dénominateur est inférieure à 1.

b) Comparaison entre deux fractions :

* Il faut mettre les deux fractions au même dénominateur
* Celle qui a le plus grand numérateur est la plus grande.

Exemple : Compare les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$.

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.
Le plus petit multiple commun est 7 × 8 = 56, donc $\frac{2\times \mathbf{8}}{7\times \mathbf{8}}=\frac{16}{56}$ et $\frac{3\times \mathbf{7}}{8\times \mathbf{7}}=\frac{21}{56}$.
Or $\frac{16}{56}<\frac{21}{56}$ donc $\frac{2}{7}<\frac{3}{8}$.

Additions et soustractions:

Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Pour tous nombres *a*, *b* et *c* , *c* non nul : $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

Exemple : Calcule l'expression A = $-1+\frac{13}{30}-\frac{-11}{12}$.

Multiples de 30 : 30 ; 60 ; 90 ; 120 ... Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60	→ On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.
A = $\frac{-1\times 60}{1\times 60}+\frac{13\times 2}{30\times 2}+\frac{11\times 5}{12\times 5}$	→ On détermine le signe de chaque quotient et on réduit les quotients au même dénominateur 60.
A = $\frac{-60}{60}+\frac{26}{60}+\frac{55}{60}=\frac{-60+26+55}{60}$	→ On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.
A = $\frac{21}{60}=\frac{7\times \mathbf{3}}{20\times \mathbf{3}}=\frac{7}{20}$	→ On simplifie si possible.

Addition et soustraction de nombres relatifs

Addition de deux nombres relatifs :

Les deux nombres ont le même signe: - on garde le signe commun; - on additionne les distances à zéro	(+ 2,5) + (+ 6,1) = + 8,6 8,6 = 2,5 + 6,1 (– 2,5) + (– 6,1) = – 8,6
Les deux nombres n'ont pas le même signe : - on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro; - on soustrait les distances à zéro.	(+ 2,5) + (– 6,1) = – 3,6 6,1>2,5 donc 3,6 = 6,1 – 2,5 (– 2,5) + (+ 6,1) = +3,6
Les nombres + 3 et – 3 sont dits **opposés** : ils sont de signes contraires et ont la même distance à zéro.	(+3) + (– 3) =0

– *a* est l'opposé de *a.* (cela ne signifie pas de – *a* est toujours négatif)	Si *a* = 5,3 alors – *a* = – 5,3. Si *a* = – 5,3 alors – *a* = – (– 5,3 *)* = 5,3

Soustraction de deux nombres relatifs :

Pour soustraire un nombre relatif, **on additionne l'opposé de ce nombre.**	(+ 2,5) – (– 6,1) = (+ 2,5) + (+ 6,1) = + 8,6	(+ 2,5) – (+ 6,1) = (+ 2,5) + (– 6,1) = – 3,6

Méthode : effectuer des additions et soustractions de nombres relatifs :

Une écriture simplifiée d'une expression contenant des nombres relatifs est une écriture sans parenthèses.	2,5 – 6,1 signifie : (+ 2,5) + (– 6,1) ou (+ 2,5) – (+ 6,1) – 2,5 + 6,1 signifie : (– 2,5) + (+ 6,1) ou (– 2,5) – (– 6,1)

On regroupe les termes de même signe	A = 5 + 18 – 14 + 3 – 9 A = 26 – 23 A = 3
On effectue les calculs entre parenthèses On simplifie le calcul	B = (2 – 8) + (– 15 + 4) B = – 6 + (– 11) B = – 6 – 11 B = – 17
On effectue les calculs entre parenthèses On simplifie le calcul On regroupe les termes de même signe	C = – 15 – (7 – 18) + (14 – 16) C = – 15 – (–11) + (–2) C = – 15 + 11 – 2 C = 11 – 17 C = – 6

Multiplications et divisions de nombres relatifs

Multiplication de deux nombres relatifs :

Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif. La distance à zéro de ce produit est égale au produit des distances à zéro.	$(-7)\times 6 = -42$ $4 \times (-3{,}1) = -12{,}4$
Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif. La distance à zéro de ce produit est égale au produit des distances à zéro.	$2{,}5 \times 1{,}5 = 3{,}75$ $(-7)\times(-6) = 42$
Multiplier par (– 1) un nombre relatif revient à prendre son opposé	$(-42) \times (-1) = 42$ $9{,}2 \times (-1) = -9{,}2$

Multiplication de plusieurs nombres relatifs :

Pour déterminer le signe d'un produit de plusieurs facteurs, on compte **le nombre de facteurs négatifs**. Lorsque le nombre de facteurs négatifs de ce produit est **<u>pair</u>**, le produit est **<u>positif</u>**. Lorsque le nombre de facteurs négatifs de ce produit est ***impair***, le produit est ***négatif***.	A =(– 8)×(– 7)×5,5×(–0,25)×2,3 A est un produit qui comporte 3 facteurs négatifs. 3 est impair. A est négatif. A = – (8×7×5,5×0,25×2,3) B =–7×4×(–5)×(–25)×2,3×(–2) B est un produit qui comporte 4 facteurs négatifs. 4 est pair. B est positif. B =7×4×5×25×2,3×2

Division de nombres relatifs :

Le quotient de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif. La distance à zéro de ce quotient est égale au quotient des distances à zéro.	$\frac{-42}{6}=(-42)\div 6=-7$ $\frac{56}{-8}=56\div(-8)=-7$
Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif. La distance à zéro de ce quotient est égale au quotient des distances à zéro.	$\frac{-4}{-5}=-4\div(-5)=0{,}8=\frac{4}{5}$

Lorsqu'un quotient n'est pas un nombre décimal, * la valeur exacte est une fraction * on peut donner des valeurs approchées de ce quotient.	$\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}\approx -0{,}67$

Multiplications et divisions de fractions

Multiplication :

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous nombres *a*, *b*, *c* et *d* , *c* et *d* non nul : $\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$

Remarque :

* Si *c* = 1, la formule devient $a\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{d}=(a\times b)\div d=(a\div d)\times b=a\times(b\div d)$

* Il faut penser à simplifier avant de multiplier en cherchant des facteurs communs

Exemple : Calcule l'expression B = $-\frac{35}{33}\times\frac{-39}{-80}$. Donne le résultat sous forme simplifiée.

B = $-\frac{35\times39}{33\times80}$	On détermine le signe du résultat
B = $-\frac{7\times\mathbf{5}\times13\times\mathbf{3}}{11\times\mathbf{3}\times2\times\mathbf{5}\times8}$	On cherche des facteurs communs.
B = $-\frac{7\times13}{11\times2\times8}$	On simplifie.
B= $-\frac{91}{176}$	On calcule.

Division :

1) inverse :

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Tout nombre *x* non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.

Tout nombre en en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ (*a* ≠ 0 et *b* ≠ 0) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques :

*Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.

* Zéro est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.

2) méthode :

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

Pour tous nombres *a*, *b*, *c* et *d* , b, *c* et *d* non nul : $\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Exemple : Calcule C = $\frac{-8}{7}\div\frac{5}{-3}$.

C = $+\left(\frac{8}{7}\div\frac{5}{3}\right)$	On détermine le signe du résultat.
C = $\frac{8}{7}\times\frac{3}{5}$	On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.
C = $\frac{8\times3}{7\times5}$	On multiplie les fractions. On constate que l'on ne peut pas simplifier.
C = $\frac{24}{35}$	On calcule.

Puissances

Puissance d'un nombre

Définition de a^n :

a est un nombre quelconque et n est un entier positif,

on écrit $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$

exemples : $2^5 = 2\times2\times2\times2\times 2=32$ $(-7)^4 =(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) = 2\,401$

$(-4)^3 =(-4)\times(-4)\times(-4) =-64$ $-7^4 = -7\times7\times7\times7 = -2\,401$

$10^6 = 10\times10\times10\times10\times10\times10 = 1\,000\,000$ $10^{13} = 10\,000\,000\,000\,000$

$a^1 = a$ $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)\times\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}$

remarque : le signe de a^n avec $a < 0$ et attention aux parenthèses.

Définition de a^{-n} :

a (différent de 0)est un nombre quelconque et n est un entier positif,

on écrit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (c'est l'inverse de a^n)

exemples : $2^{-5} = \frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ $(-7)^{-4} = \frac{1}{(-7)^4}=\frac{1}{2\,104}$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$ (c'est l'inverse de x) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$

Définition de a^0 :

On a $1 = a^n \times \frac{1}{a^n} = a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0$

(attention a ne peut pas être égal à 0)

A retenir $1 = a^0$

exemple : $\left(\frac{153}{47}\right)^0 = 1$

Propriétés

$a^m\times a^n=a^{m+n}$ $(a\times b)^m=a^m\times b^m$ $(a^m)^n=a^{m\times n}$

$a^0 = 1$ avec $a\neq0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ **avec $b\neq0$** $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ **avec $a\neq0$**

Attention $(a+b)^m\neq a^m+b^m$

Notation scientifique

Définition :

Un nombre positif est écrit en notation scientifique

lorsqu'il est écrit sous la forme suivante : $a \times 10^m$.

Avec : a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et m est un nombre entier relatif.

Exemple : $A = \dfrac{0{,}3 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-4}}$ → On regroupe les puissances.

$A = \dfrac{0{,}3 \times 5}{4} \times \dfrac{10^{-2} \times 10^{-5}}{10^{-4}}$ → On utilise les règles sur les puissances.

$A = \dfrac{1{,}5}{4} \times 10^{-2-5-(-4)}$ → On fait la division.

$A = 0{,}375 \times 10^{-3}$ → 0,375 n'est pas une écriture scientifique.

$A = 3{,}75 \times 10^{-1} \times 10^{-3}$ → On finalise le calcul.

$A = 3{,}75 \times 10^{-4}$ → Le résultat est en notation scientifique.

avec la calculatrice

Vous devez connaître les touches de votre calculatrice.

Les préfixes :

On peut résumer les multiples de l'unité dans un tableau :

Puissance	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}
Préfixe	terra	giga	méga	kilo	hecto	déca
Symbole	T	G	M	k	h	da

Puissance	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
Préfixe	déci	centi	milli	micro	nano	pico
Symbole	d	c	m	µ	n	p

Exemples :

1) Le watt est l'unité qui permet de mesurer la puissance. À quoi correspond 3,2 mégawatt ?
Le préfixe méga signifie qu'on multiplie l'unité de base de la mesure par 10^6 .
1 mégawatt équivaut donc à 10^6 watts, qu'on peut écrire aussi 1 000 000 watts.
3,2 mégawatt équivaut donc à $3{,}2 \times 10^6$ watts, qu'on peut écrire aussi 3 200 000 watts.

2) Convertir 27 nm en mètres.
Le symbole n (pour nano) signifie qu'on multiplie l'unité de base par 10^{-9}.
1 nm équivaut à 10^{-9} mètre. D'où 27 nm = 27×10^{-9} m.

3) Convertir 0,0120 L en mL.
Le préfixe m (pour milli) signifie qu'on multiplie l'unité de base par 10^{-3} ou par 0,001.
1 ml équivaut à 10^{-3}L = 0,001 L. On a ici 12 × 0,001 L donc 12 mL.

PUISSANCES

PUISSANCES D'EXPOSANT ENTIER RELATIF D'UN NOMBRE

Définitions:

- Pour tout nombre relatif a et pour tout entier naturel n non nul, l'écriture a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots a \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \qquad (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

Remarque:

a^n se lit « a exposant n ».

- Par convention, pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Exemples:

$$(-5)^0 = 1 \qquad 3^1 = 3$$

- Pour tout nombre relatif a non nul et pour tout entier naturel n, l'écriture a^{-n} désigne l'inverse de a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{64} \qquad (-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = \frac{1}{(-7) \times (-7) \times (-7)} = -\frac{1}{343}$$

Théorèmes:

- Si dans un calcul sans parenthèses il y a des puissances, alors il faut effectuer les puissances avant toutes les autres opérations.
- Si dans un calcul avec des parenthèses il y a des puissances alors il faut d'abord effectuer les calculs entre parenthèses.

Exemples:

$$\begin{array}{ll} A = 3 + 4 \times 3^4 & B = (4+5)^3 + (2+3^2) \\ A = 3 + 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 & B = 9^3 + (2 + 3 \times 3) \\ A = 3 + 4 \times 81 & B = 9 \times 9 \times 9 + (2+9) \\ A = 3 + 324 & B = 729 + 11 \\ A = 327 & B = 740 \end{array}$$

Puissances et calculs

- a est un nombre relatif non nul, n et p sont deux entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

Exemples:

$$2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 \qquad 3^4 \times 3^{-5} = 3^{4+(-5)} = 3^{-1}$$

$$\frac{(-5)^8}{(-5)^5} = (-5)^{8-5} = (-5)^3 \qquad \frac{7^8}{7^{-7}} = 7^{8-(-7)} = 7^{15}$$

$$(3^2)^9 = 3^{2 \times 9} = 3^{18} \qquad ((-4)^2)^{(-6)} = (-4)^{2 \times (-6)} = (-4)^{-12}$$

- a et b sont deux nombres relatifs non nuls, n est un entier relatif.

$$(ab)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples:

$$(3 \times 4)^7 = 3^7 \times 4^7 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

CAS PARTICULIER : PUISSANCES DE 10

Écriture décimale

Pour tout entier positif n non nul:

- $\underbrace{10^n = 10 \times 10 \times 10 \ldots\ldots. 10 \times 10}_{\text{n facteurs}} = \underbrace{10 \ldots\ldots. 0}_{\text{n zéros}}$
- $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times 10 \ldots\ldots. 10 \times 10}_{\text{n facteurs}}} = \underbrace{0{,}0 \ldots 01}_{\text{n chiffres après la virgule}}$

Quelques valeurs de puissances de 10:

10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000

Opérations et puissances de 10

Quels que soient les nombres entiers relatifs m et n:

$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ $\qquad$ $\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ $\qquad$ $(10^n)^m = 10^{n \times m}$

Exemples:

$10^5 \times 10^{27} = 10^{5+27} = 10^{32}$ $\qquad$ $\dfrac{10^7}{10^{-4}} = 10^{7-(-4)} = 10^{11}$ $\qquad$ $(10^3)^{-5} = 10^{3 \times (-5)} = 10^{-15}$

Notation scientifique d'un nombre décimal non nul

L'écriture scientifique d'un nombre décimal différent de 0 est l'écriture de la forme $a \times 10^n$ où:

- a est un nombre décimal écrit avec un seul chiffre autre que 0 avant la virgule
- n est un nombre entier relatif.

Exemples:

$312587 = 3{,}12587 \times 10^5$ $\qquad$ $0{,}000478 = 4{,}78 \times 10^{-4}$

MULTIPLICATION ET DIVISION EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

MULTIPLICATION ET ÉCRITURES FRACTIONNAIRES

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemples

- $\frac{2}{15}\times\frac{-21}{14}=-\frac{2\times21}{15\times14}=-\frac{2\times3\times7}{3\times5\times2\times7}=-\frac{1}{5}$
- $-2\times\frac{-5}{7}=+\frac{2\times5}{7}=\frac{10}{7}$

DIVISION ET ÉCRITURES FRACTIONNAIRES

Inverse d'un nombre en écriture fractionnaire

c et d désignent des nombres relatifs **non nuls.**

L'inverse du nombre $\frac{c}{d}$ est le nombre $\frac{d}{c}$

Exemples

- L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\frac{3}{-7}$ c'est à dire $-\frac{3}{7}$
- L'inverse de $\frac{1}{3}$ est $\frac{3}{1}$ c'est à dire 3

Quotient de nombres en écriture fractionnaire

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

Soient a, b, c, d des nombres relatifs avec $b\neq0$, $c\neq0$, $d\neq0$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Exemples

- $\frac{-5}{7}:\frac{3}{4}=-\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}=-\frac{20}{21}$
- $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$