PROBABILITÉS

NOTIONS DE PROBABILITÉ

Définition

Quand une expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement élémentaire se rapproche d'une valeur particulière : la **probabilité** de cet événement élémentaire.

Exemples

- La probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5.
- Dans un collège on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	18	25	20	11	5	3
Fréquence en %	21,95	30,49	24,39	13,41	6,1	3,66

On choisit un élève au hasard dans le collège

La probabilité pour que cet élève appartienne à une famille de 3 enfants est approchée par la fréquence correspondante, soit $\frac{24{,}39}{100}$ soit 0,2439.

Définition

La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

CALCUL DE PROBABILITÉ

Propriétés

- Quel que soit l'événement A on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- La probabilité d'un événement certain est égale à 1
- La probabilité d'un événement impossible est égale à 0
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1
- Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Exemple

Dans l'expérience du jeu de dé à 6 faces, on appelle :

A l'événement élémentaire : « obtenir 1 »   B l'événement élémentaire : « obtenir 2 »

C l'événement élémentaire : « obtenir 3 »   D l'événement élémentaire : « obtenir 4 »

E l'événement élémentaire : « obtenir 5 »   F l'événement élémentaire : « obtenir 6 »

Chaque face a la même chance d'apparition, donc :

$$P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=P(E)=P(F)$$

G l'événement élémentaire : « obtenir un nombre pair »

$$P(G)=P(B)+P(C)+P(D)$$

$$P(G)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$P(G)=\frac{3}{6}$$

$$P(G)=\frac{1}{2}$$

Propriété

La **probabilité** de l'événement contraire de A est

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Dans l'exemple précédent,

l'événement $\overline{G}$ est : « obtenir un nombre impair »

$$P(\overline{G})=1-P(G)$$

$$P(\overline{G})=1-\frac{1}{2}$$

$$P(\overline{G})=\frac{1}{2}$$

STATISTIQUES

FRÉQUENCES

Notes obtenues à un devoir

Voici les notes obtenues (sur 10) par les 26 élèves de la classe de cinquième A au dernier devoir :

Notes sur 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de devoirs ayant eu cette note	1	0	2	4	5	2	4	2	2	3	1

L'effectif total est 26. L'effectif de la note 4 est 5.

Définition :

La fréquence d'une donnée dans une série statistique correspond au quotient de l'effectif de cette donnée par l'effectif total.

La fréquence d'une donnée peut s'exprimer par :

un nombre décimal inférieur ou égal à 1

un pourcentage $\dfrac{effectif}{effectif\ \ total} \times 100$

Propriété : somme des fréquences

La somme des fréquences des données dans une série statistique est toujours égale à 1.

La somme des fréquences en pourcentage des données dans une série statistique est toujours égale à 100.

Sur notre exemple :

$\dfrac{5}{26} = 0{,}19$ 0,19 est appelé la fréquence de la note 4.

Notes sur 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
effectifs	1	0	2	4	5	2	4	2	2	3	1	26
fréquences	0,04	0	0,08	0,15	0,19	0,08	0,15	0,08	0,08	0,11	0,04	1
Fréquences en %	4	0	8	15	19	8	15	8	8	11	4	100

MOYENNE PONDÉRÉE

Définition

La **moyenne pondérée** d'une série de valeurs est égale à la **somme** des **produits** de chaque valeur par son effectif **divisée** par l'effectif total.

Méthode

Pour calculer la moyenne des valeurs d'une série, pondérées par leurs effectifs:

- On multiplie chaque valeur par son effectif,
- on additionne tous les produits obtenus,
- puis on divise cette somme par l'effectif de la série.

Dans l'exemple:

Notes	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	20	total
Effectif	1	2	3	3	2	1	1	1	4	1	2	1	1	1	1	25

La moyenne est

$$m=\frac{1\times2+2\times3+3\times4+3\times6+2\times7+1\times8+1\times9+1\times10+4\times11+1\times12+2\times13+1\times15+1\times16+1\times17+1\times20}{25}$$

$$m=\frac{2+6+12+18+14+8+9+10+44+12+26+15+16+17+20}{25}=\frac{229}{25}=9{,}16$$

MOYENNE PONDÉRÉE

La moyenne d'une série n'est pas forcément égale à l'une des valeurs de cette série.

9,16 n'est pas une des notes obtenues.

La moyenne d'une série est rarement égale à la moyenne des valeurs extrêmes.

$$\frac{2+20}{2}=\frac{22}{2}=11\neq9{,}16$$

La moyenne d'une série est toujours comprise entre les valeurs extrêmes.

$2 < 9{,}16 < 20$.

La moyenne des moyennes partielles d'une série statistique n'est pas nécessairement égale à la moyenne de cette série.

La moyenne des notes inférieures à 10

$$m_1=\frac{1\times2+2\times3+3\times4+3\times6+2\times7+1\times8+1\times9}{13}=\frac{69}{13}\simeq5{,}3$$

La moyenne des notes supérieures ou égales à 10

$$m_2=\frac{1\times10+4\times11+1\times12+2\times13+1\times15+1\times16+1\times17+1\times20}{12}=\frac{160}{12}\simeq13{,}3$$

$$\frac{(m1+m2)}{2}=\frac{(5{,}3+13{,}3)}{2}=9{,}3\neq9{,}16$$

Statistiques

Dans les sociétés occidentales les statistiques interviennent énormément dans la vie courante :

- dans le domaine économique (ex.: les multiples sondages pour connaître les goûts des consommateurs).
- dans le domaine politique.

Définitions - Effectifs :

Les statistiques étudient une **population.** ("qui" on étudie) *par ex. : les jeunes de 15 à 24 ans*
Elles renseignent sur un **caractère** de cette population ("sous quel angle" on étudie) *par ex. : la taille*
Un caractère prend des **valeurs** (les réponses au sondage) *par ex. : 1m60*

- un caractère est dit **quantitatif**, quand les valeurs sont des nombres (ex. précédent)
- un caractère est dit **qualitatif**, dans le cas contraire.

Par ex.: la chanson préférée des 15-24 ans.

Le nombre de fois où un caractère prend une valeur est **l'effectif de cette valeur** :
par exemple : si à la question "quel est votre fruit préféré ?" la réponse "une pomme" revient 60 fois, on dira que l'effectif de la valeur "une pomme" est de 60.

On définit les **effectifs cumulés** (croissants) d'une série en ajoutant un à un les effectifs

exemple : nombre d'enfants par foyer dans le village A

nombre d'enfants	effectifs (nombre de foyers)	effectifs cumulés
0	60	60
1	150	60 + 150 = 210
2	100	210 + 100 = 310
3	80	310 + 80 = **390** **(c'est l'effectif total)**

Fréquences :

Bien souvent en statistiques, on préfère aux effectifs les **fréquences**, car elles nous renseignent sur l'importance des valeurs par rapport à l'effectif total (: le nombre total de valeurs).

La **fréquence d'une valeur** est le quotient : $\dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$

Elle est en général exprimée par un nombre décimal, qui est inférieur à 1 *: par exemple 0,24*
On peut également l'exprimer en **pourcentage** *: sur l'exemple précédent 24%*

De même que pour les effectifs, on définit également **les fréquences cumulées** (croissantes):

Remarque : la dernière fréquence cumulée correspond à l'effectif total, donc vaut 1, ou 100%
pour calculer des fréquences en pourcentage, on peut construire un tableau de proportionnalité et utiliser la technique du produit en croix :

Exemple : compléter le tableau suivant

effectifs	60	150	**total : 390**
fréquences en %	...	...	**100**

Représentation d'une étude statistique :

Dans la vie courante les représentations sous forme de diagramme des résultats d'une série statistique ont plus de sens pour le grand public que des listes d'effectifs ou même de fréquences.

Les représentations sont donc un moyen performant de faire passer une information.

Pour une étude statistique on peut faire plusieurs représentations, et chacune d'entre elle est utilisée dans un but bien précis :

Les différents types de diagrammes :

- **diagramme en bâtons** : la hauteur d'un bâton mesure l'effectif de la valeur
  diagramme en barres : la hauteur de la barre mesure l'effectif de la valeur
- **histogramme** : au collège on utilise des barres de même largeur, la hauteur de la barre mesure l'effectif de la valeur. Les barres sont collées
- **diagramme circulaire** : on l'utilise en général pour montrer des fréquences.
  Une fréquence est représentée par un secteur angulaire (un angle). Pour construire un diagramme circulaire on peut utiliser un tableau de proportionnalité et la technique du produit en croix.

Caractéristiques de dispersion :

Définition :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs du caractère.

Remarque : ne pas confondre les effectifs et les valeurs du caractère.

Caractéristiques de position :

1) Calculer une moyenne arithmétique simple :

Méthode

Pour calculer la moyenne d'une série de valeurs, il faut :

a) Calculer la somme de toutes les valeurs

b) Puis diviser par le nombre total de ces valeurs.

Exemple : calculer la moyenne des températures de la semaine du 03/12 au 10/12 à Romillé

lundi : -2°C ; mardi : -1°C ; mercredi : 3°C ; jeudi : 3°C ; vendredi : 1°C ; samedi : 0°C ; dimanche : 6°C

2) Calculer une moyenne arithmétique pondérée

Méthode

Pour calculer la moyenne pondérée d'une série de valeurs, il faut :

a) Calculer les produits de chaque valeur par leur coefficient (ou effectif),

b) Calculer la somme des produits

c) Puis diviser le résultat par la somme des coefficients (ou l'effectif total)

Exemples

A un concours scientifique, les mathématiques ont un coefficient 5, la physique un coefficient 3 et la géologie un coefficient 2. Carine a eu 11 en mathématiques, 9 en physique et 12 en géologie.

Quelle est sa moyenne pondérée ?

Notes (N)	11	9	12	Total
Coefficient (c)	5	3	2	
$N \times c$				

Nombre moyen de frères et sœurs

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	72	108	95	110	39	19	7	450

3) Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série regroupée en classe

Méthode

Pour calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série de valeurs regroupée en classe, il faut :

- Prendre le centre de chaque classe (moyenne des valeurs extrêmes)
- Calculer le produit de ce centre par l'effectif correspondant
- Faire la somme de ces produits
- Puis diviser cette somme par l'effectif total.

Exemple :Durée moyenne du trajet maison collège

Durée du trajet maison-collège (en minutes)	Centre de classe	Effectifs
$0 \leq t < 5$	= 2,5	25
$5 \leq t < 10$		111
$10 \leq t < 15$		92
$15 \leq t < 20$		85
$20 \leq t < 25$		105
$25 \leq t < 30$		32
TOTAL		450

4) Médiane :

Définition : La **médiane** *m* d'une série statistique ordonnée est une valeur qui partage le groupe étudié en deux sous-groupes de **même effectif** chacun, tels que :
- tous les éléments du premier groupe ont des valeurs inférieures ou égales à *m* ;
- tous les éléments du deuxième groupe ont des valeurs supérieures ou égales à *m*.

Exemple 1 : nombre impair de valeurs dans une série

La série ordonnée suivante comporte 9 valeurs.

La médiane est la ….ème de ces valeurs, à savoir ici,……..

5 - 5 - 5 - 10 - 11 - 13 - 13 - 13 - 15

remarque : La moyenne de cette série est :

Exemple 2 : nombre pair de valeurs dans une série

Chacune des séries ordonnées suivantes comporte 6 valeurs.

La médiane est n'importe quel nombre compris entre la …ème et la ….ème valeur, mais en général on convient de prendre la moyenne de ces deux valeurs.

10 - 10 - 11 - 11 - 12 - 18

… est la médiane

Remarque : La moyenne de cette série est :

9 - 9 - 11 - 12 - 15 - 16

….. est la médiane

La moyenne de cette série est :

Remarque :

* pour la moyenne M et la médiane *m* d'une série, on peut avoir $m \leq M$ ou $m \geq M$;

* deux séries peuvent avoir la même moyenne et deux médianes différentes, la même médiane et deux moyennes différentes.

Probabilités

Vocabulaire : le langage des probabilités

• Une expérience est dite **aléatoire** lorsque l'on ne peut pas prévoir son résultat avant qu'elle ne se réalise.
Exemple : les jeux de hasard comme le lancer de dé, le tirage de cartes ou de numéro,
le tirage de boules indiscernables au toucher dans une urne.

• Les résultats d'une **expérience aléatoire** sont appelés **issues.**
Exemple : On lance un dé cubique. Les issues sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

• On appelle **événement** la réalisation d'une ou plusieurs issues lors d'une expérience aléatoire.
Exemple : on lance un dé cubique « Obtenir un nombre pair » est un événement.
Les issues, qui réalisent cet événement, sont : 2, 4 et 6.

• Un **événement certain** est un événement qui se réalise nécessairement.
• Un **événement impossible** est un événement qui ne peut pas se réaliser.
Exemple : on lance un dé cubique. L'événement « obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 » est un événement certain.
L'événement « obtenir 7 » est un événement impossible.

• Deux événements sont dits **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.
Exemple : on lance un dé cubique.
Les événements « obtenir un nombre pair » et « obtenir 3 » sont incompatibles.
Ce qui n'est pas le cas des événements « obtenir un nombre pair » et
« obtenir un nombre inférieur à 3 » réalisés simultanément par 2.

• L'**événement contraire** d'un événement A est l'événement réalisé lorsque A ne l'est pas.
Exemple : l'événement contraire de l'événement « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ».

Calcul d'une probabilité

Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont autant de chance de se réaliser, on calcule la probabilité d'un événement en divisant le nombre d'issues correspondant à cet événement par le nombre total d'issues.

$$\text{Probabilité d'un événement} = \frac{nombre \;\; d'issues \;\; correspondant \;\; à \;\; l'événement}{nombre \;\; total \;\; d'issues}$$

Exemple : on lance un dé cubique.
Les issues, qui réalisent l'événement « obtenir un nombre pair », sont : 2, 4 et 6.
Il y a 3 chances sur 6 d'obtenir un nombre pair.
Probabilité de « obtenir un nombre pair » = $\frac{1}{2}$

Attention ! Une probabilité est un nombre positif.
• Une probabilité est un nombre inférieur à 1 car le nombre d'issues favorables à un événement est inférieur ou égal au nombre total d'issues.
• Une probabilité est donc un nombre compris entre 0 et 1

PROPRIÉTÉS
La probabilité d'un événement impossible est 0.
La probabilité d'un événement certain est 1.
La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.