THÉORÈME DE PYTHAGORE ET SA RÉCIPROQUE

RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE POSITIF

Définition:

$\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a »

$\sqrt{a}$ est un nombre; il est positif; son carré est a.

Exemple: $\sqrt{25}=5$ car $5\times5=25$

Sur la calculatrice:

la touche √ est la touche permettant de trouver la racine carrée d'un nombre.

En général, elle ne fournit pas la valeur exacte d'une racine carrée

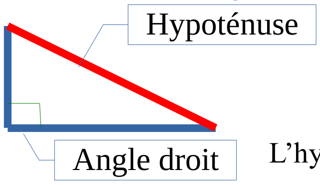
Liste des carrés parfaits

$1^2=1$ $2^2=4$ $3^2=9$ $4^2=16$ $5^2=25$ $6^2=36$ $7^2=49$ $8^2=64$ $9^2=81$ $10^2=100$ $11^2=121$ $12^2=144$

CALCUL LA LONGUEUR D'UN CÔTÉ D'UN TRIANGLE RECTANGLE

Définition

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le coté opposé à l'angle droit.



Le triangle ABC est rectangle en A.

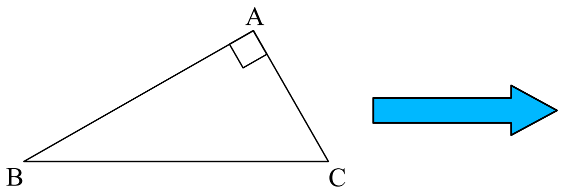
L'hypoténuse du triangle ABC est le segment [BC].

Remarque

L'hypoténuse est le côté le plus long du triangle.

Théorème:

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des c carrés des longueurs des deux autres côtés.



Dans le triangle ABC:

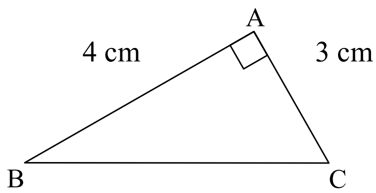
$BC^2=AC^2+AB^2$

Le triangle ABC est rectangle en A

Ce théorème permet de calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle dont on connaît déjà les longueurs de deux côtés.

Exemples:

On cherche la longueur de l'hypoténuse



Le triangle ABC est rectangle en A

D'après le théorème de Pythagore:

$BC^2=AB^2+AC^2$

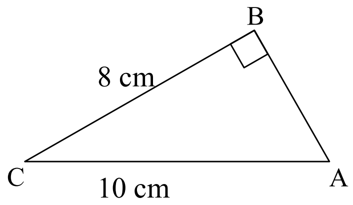
$BC^2=4^2+3^2$

$BC^2=16+9$

$BC^2=25$

Donc, BC= $\sqrt{25}=5$ cm

On cherche à calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit

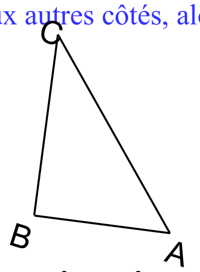


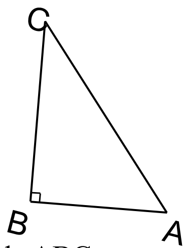
Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore:
$AC^2 = BC^2 + AB^2$
$10^2 = 8^2 + AB^2$
$100 = 64 + AB^2$
$AB^2 = 100 - 64$
$AB^2 = 36$
Donc, AB= $\sqrt{36} = 6$ cm

PROUVER QU'UN TRIANGLE EST RECTANGLE

Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

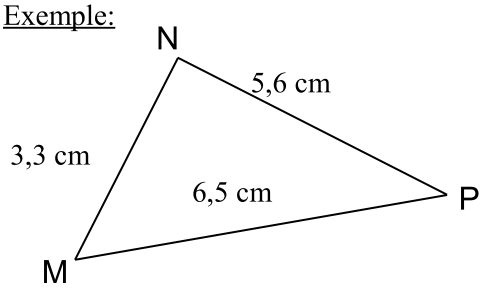




$AC^2 = BC^2 + AB^2$

Le triangle ABC est rectangle en B

Exemple:

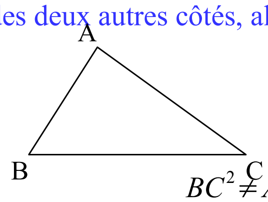


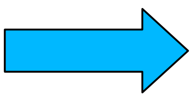
Dans le triangle NMP, le plus grand côté est [MP] et $MP^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$.
$NP^2 + NM^2 = 5{,}6^2 + 3{,}3^2$
$NP^2 + MN^2 = 31{,}36 + 10{,}89$
$NP^2 + MN^2 = 42{,}25$
Donc, $MP^2 = NP^2 + MN^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NMP est rectangle en N.

PROUVER QU'UN TRIANGLE N'EST PAS RECTANGLE

Propriété

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.





Le triangle ABC n'est pas rectangle

$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

Exemple:

Le triangle ABC de côtés AB=2 cm, AC=3 cm et BC=4 cm est-il rectangle?
Dans le triangle ABC, [BC]est le plus grand côté
$BC^2 = 4^2 = 16$ et $AB^2 + AC^2 = 2^2 + 3^2$
$AB^2 + AC^2 = 4 + 9$
$AB^2 + AC^2 = 13$
donc, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$
D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

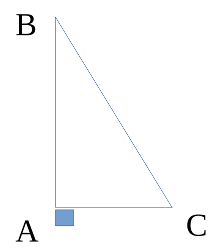
Le théorème de Pythagore

le théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle,
le carré de la longueur de l'hypoténuse est égale à
la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

ABC est un triangle rectangle en A, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Le plus grand côté



On peut calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres côtés. Pour cela, **on prend la racine carrée d'un nombre.**

Racine carrée :

Définition

On considère un nombre positif *x*.
Alors $\sqrt{x}$ est le nombre positif dont le carré vaut *x*.

Exemples

$\sqrt{9} = 3$ car $3 > 0$ et $3^2 = 9$; $\sqrt{36} = 6$ car $6 > 0$ et $6^2 = 36$

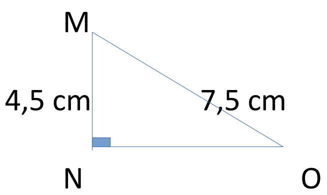
$\sqrt{50} \approx 7{,}07$ On trouve une valeur approchée de $\sqrt{50}$ avec la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice.

Remarque : on a aussi (-3)x(-3) = 9

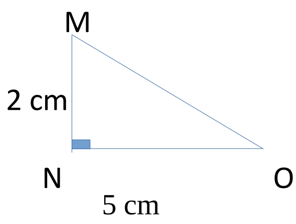
Calculer une longueur en utilisant le théorème de Pythagore :

Le triangle est rectangle et je connais les longueurs de deux côtés :

1er cas : on connaît la longueur de l'hypoténuse et d'un autre côté.	2ème cas : on connaît la longueur des deux côtés de l'angle droit.
Exemple: voici un croquis. Calculer NO.	Exemple: voici un croquis. Calculer MO



Dans le triangle MNO **rectangle en N,**
[MO] est l'hypoténuse,
d'après le théorème de Pythagore:
$MO^2 = NO^2 + NM^2$
en remplaçant par les valeurs on a :
$7{,}5^2 = NO^2 + 4{,}5^2$
donc $NO^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2$
$NO^2 = 56{,}25 - 20{,}25$
$NO^2 = 36$
or NO est une longueur
donc $NO = \sqrt{36}$ cm
NO = 6 cm



Dans le triangle MNO **rectangle en N,**
[MO] est l'hypoténuse,
d'après le théorème de Pythagore:
$MO^2 = NO^2 + NM^2$
en remplaçant par les valeurs on a :
$MO^2 = 5^2 + 2^2$
donc $MO^2 = 25 + 4$
$MO^2 = 29$

or MO est une longueur
donc $MO = \sqrt{29}$ cm
$MO \approx 5{,}4$ cm

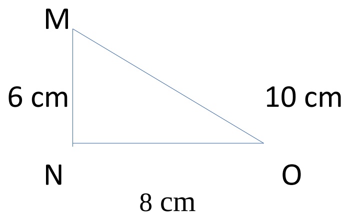
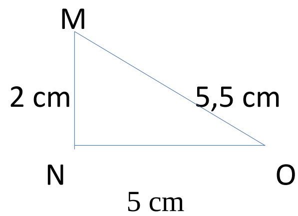
La réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore :

Dans un triangle, si la somme des carrés des longueurs de 2 côtés est égale au carré du troisième côté alors le triangle est un triangle rectangle d'hypoténuse ce troisième côté. Ou ABC est un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est rectangle en A.
Si l'égalité n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle.
on peut tester un triangle pour savoir s'il est rectangle ou pas quand on connaît les trois côtés.

Montrer qu'un triangle est rectangle ou pas :

Je connais les longueurs des trois côtés :

1er cas : il y aura égalité.	2ème cas : il n'y aura pas égalité.
Exemple: voici un croquis. MNO est-il un triangle rectangle ?  Dans le triangle MNO , [MO] est le plus grand côté. $MO^2 = 10^2 = 100$ et $NO^2 + NM^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ donc on a : $MO^2 = NO^2 + NM^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNO est rectangle en N .	Exemple: voici un croquis. MNO est-il un triangle rectangle ?  Dans le triangle MNO , [MO] est le plus grand côté. $MO^2 = 5{,}5^2 = 30{,}25$ et $NO^2 + NM^2 = 5^2 + 2^2 = 29$ donc on a : $MO^2 \neq NO^2 + NM^2$ donc le théorème de Pythagore n'est pas vérifié, le triangle MNO n'est pas un triangle rectangle .

Remarque :

1) on ne doit pas écrire [MO] est l'hypoténuse car on ne sait pas si le triangle est rectangle avant d'avoir vérifié l'égalité.

2) on ne peut pas écrire l'égalité dès le début de la rédaction car on ne sait pas si le triangle est rectangle. On calcule le membre de droite et le membre de gauche séparément puis on peut écrire ou non l'égalité.